STAT0041: Stochastic Calculus

Lecture 5 - Continuous-time Martingale

Lecturer: Weichen Zhao　　Fall 2025

Key concepts:

- 鞅收敛定理;
- 连续时间鞅。

建立连续时间鞅论一个基本想法是利用离散时间鞅的结果，本节课我们建立离散时间鞅的收敛定理，从而能将离散时间的结果推广到连续时间。

5.1 Doob下鞅收敛定理

在介绍定理之前，需要先介绍一个重要引理，先给出一些记号。设(ξ_n)是一个$(\mathscr{F}_n)$适应过程，设$a < b$，我们定义停时序列：

$$\begin{aligned}
\tau_0 &= 0 \\
\tau_1 &= \inf\{n \geq 0, \xi_n \leq a\}, \\
\tau_2 &= \inf\{n \geq \tau_1, \xi_n \geq b\}, \\
\tau_3 &= \inf\{n \geq \tau_2, \xi_n \leq a\}, \\
\tau_4 &= \inf\{n \geq \tau_3, \xi_n \geq b\}, \\
&\cdots \\
\tau_{2m-1} &= \inf\{n \geq \tau_{2m-2}, \xi_n \leq a\}, \\
\tau_{2m} &= \inf\{n \geq \tau_{2m-1}, \xi_n \geq b\}.
\end{aligned}$$

定义ξ_n在N之前的上穿次数为：

$$U_N[a,b] \triangleq \begin{cases} 0, & \tau_2 > N, \\ \max\{m, \tau_{2m} \leq N\}, & \tau_2 \leq N. \end{cases}$$

Lemma 5.1 (Doob 上穿不等式) 设(ξ_n)是一个$\mathscr{F}_n$下鞅，那么对于所有的$N \geq 1$

$$\mathbb{E}U_N[a,b] \leq \frac{\mathbb{E}(\xi_N - a)^+}{b-a}.$$

Proof: 由于(ξ_n)在区间$[a,b]$的上穿次数等于下鞅$((\xi_n - a)^+, \mathscr{F}_n)$在区间$[0, b-a]$的上穿次数(请自行验证下鞅性质)，我们不妨考虑$(\xi_n)$为非负下鞅。

定义

$$\phi_i \triangleq \begin{cases} 1 & \tau_m < i \leq \tau_{m+1}, \text{ 且 } m \text{ 为奇数} \\ 0 & \tau_m < i \leq \tau_{m+1}, \text{ 且 } m \text{ 为偶数} \end{cases}.$$

那么

$$\begin{aligned}\{\phi_i = 1\} &= \bigcup_{m\text{为奇数}} \{\{\tau_m < i\} \cap \{\tau_{m+1} \geq i\}\} \\ &= \bigcup_{m\text{为奇数}} \{\{\tau_m < i\} \setminus \{\tau_{m+1} < i\}\} \\ &= \bigcup_{m\text{为奇数}} \{\{\tau_m \leq i-1\} \setminus \{\tau_{m+1} \leq i-1\}\} \in \mathscr{F}_{i-1},\end{aligned}$$

也就是说 ϕ_i 是可料序列。考虑 m 是满足 $2m \leq N$ 的最大正整数，由于只有$\xi_{\tau_{2k}} - \xi_{\tau_{2k-1}} \geq b$时才会上穿区间$(0,b)$，那么有

$$\begin{aligned}U_N[0,b] &\leq \frac{\xi_{\tau_2} - \xi_{\tau_1}}{b} + \frac{\xi_{\tau_4} - \xi_{\tau_3}}{b} + \cdots \frac{\xi_{\tau_{2m}} - \xi_{\tau_{2m-1}}}{b} \\ &= \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{N} \phi_i(\xi_i - \xi_{i-1})\end{aligned}$$

设

$$\eta_n \triangleq \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\xi_i - \xi_{i-1}), \quad \eta_0 = 0$$

注意到 $\xi_n = \sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \xi_{i-1}) + \xi_0$，$1 - \phi_i \geq 0$，那么有

$$\xi_n - \eta_n = \sum_{i=1}^{n}(1-\phi_i)(\xi_i - \xi_{i-1}) + \xi_0(1-\phi_0)$$

是$\mathscr{F}_n$下鞅。

(留作作业：若 (X_n) 是非负 $\mathscr{F}_n$ 下鞅列，C_n 是 $\mathscr{F}_n$非负可料随机序列，且对任意的 $n \geq 0$，$\mathbb{E}|C_n| < \infty$，则鞅变换 $Y_n = C_0X_0 + \sum_{k=1}^{n} C_k(X_k - X_{k-1})$ 是 $\mathscr{F}_n$ 下鞅。)

因此

$$\mathbb{E}[\xi_n - \eta_n] \geq \mathbb{E}[\xi_0 - \eta_0] = \mathbb{E}\xi_0 \geq 0$$

那么

$$\mathbb{E}U_N[0,b] \leq \frac{1}{b}\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N}\phi_i(\xi_i - \xi_{i-1})] = \frac{1}{b}\mathbb{E}\eta_N \leq \frac{1}{b}\mathbb{E}\xi_N.$$

■

Theorem 5.2 (Doob 下鞅收敛定理) 设(ξ_n)是一个$\mathscr{F}_n$下鞅，满足$\sup_n \mathbb{E}|\xi_n| < \infty$, 那么

$$\xi_\infty \triangleq \lim_{n\to\infty} \xi_n,\ a.s.$$

存在，并且$\mathbb{E}|\xi_\infty| < \infty$.

Proof: 反证法，假设$\lim_{n\to\infty}\xi_n,\ a.s.$ 不存在，即

$$\mathrm{P}(\{\omega \in \Omega : \limsup_{n\to\infty} \xi_n(\omega) > \liminf_{n\to\infty} \xi_n(\omega)\}) > 0$$

由于

$$\{\limsup_{n\to\infty} \xi_n > \liminf_{n\to\infty} \xi_n\} = \bigcup_{a<b,a\text{和}b\text{有理数}} \{\limsup_{n\to\infty} \xi_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} \xi_n\},$$

所以存在有理数$a < b$，使得

$$\mathrm{P}(\limsup_{n\to\infty} \xi_n > b > a > \liminf_{n\to\infty} \xi_n) > 0.$$

这意味着(ξ_n)以正概率在区间$[a,b]$有无穷次上穿，即以正概率，$U_\infty[a,b] = \infty$。

另一方面，定义$U_\infty[a,b] = \lim_{N\to\infty} U_N[a,b]$表示$\xi_0,\ldots,\xi_n,\ldots$上穿$(a,b)$的次数。由上穿不等式和Lebesgue单调收敛定理,

$$\mathbb{E}U_\infty[a,b] = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}U_N[a,b] \leq \frac{\mathbb{E}(\xi_N - a)^+}{b-a} \leq \frac{\mathbb{E}\xi_N^+ + |a|}{b-a}.$$

由于$\sup_n \mathbb{E}|\xi_n| = \sup_n \mathbb{E}[\xi_n^+ + \xi_n^-] < \infty$，因此

$$\mathbb{E}U_\infty[a,b] < \infty.$$

这意味着$U_\infty[a,b] < \infty$ a.s.成立，矛盾！

所以$\lim_{n\to\infty}\xi_n$，*a.s.*存在，记为ξ_∞，进一步由Fatou引理，

$$\mathbb{E}|\xi_\infty| \le \sup_{n\ge 1}\mathbb{E}|\xi_n| < \infty.$$

■

注. 上鞅的收敛定理：参考《测度论讲义(第3版)》，严加安，P188，定理8.2.1

5.2 连续时间鞅

首先介绍连续时间情形的一些基本概念，并假设本节带滤子流的概率空间都满足通常的条件。

Definition 5.3 (连续时间鞅) 设$(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t)_{t\ge0},\mathrm{P})$是一个带流的概率空间，$X=(X_t)$ 是其上的一个适应过程，满足 $\mathbb{E}[|X_t|]<\infty$，称X是

(1) 一个$\mathscr{F}_t$鞅，如果$\forall\ 0\le s<t$, $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]=X_s$;

(2) 一个$\mathscr{F}_t$上鞅，如果$\forall\ 0\le s<t$, $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]\le X_s$;

(3) 一个$\mathscr{F}_t$下鞅，如果$\forall\ 0\le s<t$, $\mathbb{E}[X_t|\mathscr{F}_s]\ge X_s$.

Definition 5.4 (随机过程的连续性) 我们称一个随机过程是连续的，如果它的所有样本轨道几乎必然是连续的，即

$$\mathrm{P}\left(\{\omega | t\mapsto X_t(\omega)\ \text{是连续的}\}\right)=1.$$

左连续和右连续是相似定义的。

Definition 5.5 (右连左极过程) 称一个随机过程是右连左极*(cadlag, continue à droite, limite à gauche)*过程，如果它的所有样本轨道几乎必然是右连左极的。

有时我们并不清楚一个过程是否是右连左极的，下面我们说明，只要稍微修正一下过程，我们就可以确保样本轨道是右连左极的，所以之后我们总可以假设过程是右连左极。

首先我们先给出“修正”的概念：

Definition 5.6 (修正) 设 $(X_t)_{t\in T}$ 和 $(\tilde{X}_t)_{t\in T}$ 是两个取值于同一个状态空间的随机过程，我们称过程 $\tilde{X}$ 是过程 X 的一个修正*(Modification)*，如果

$$\forall t \in T, \quad \mathrm{P}(\tilde{X}_t = X_t) = 1.$$

下面的引理说明每个鞅都存在右连左极修正。

Lemma 5.7 (Theorem 3.18 of [1]) 设$(X_t)_{t\in T}$是一个上鞅，满足函数$t \mapsto \mathbb{E}[X_t]$是右连续的，那么$X$存在一个右连左极的修正，且这个修正也是$\mathscr{F}_t$-上鞅。特别地，每个鞅都一定存在右连左极修正，因为$\mathbb{E}[X_t]$是一个常数。

注. 之后我们总可以假设鞅是右连左极的。

Definition 5.8 (停时) 设$(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}, \mathrm{P})$是一个带流的概率空间，随机变量$\tau : \Omega \to [0, \infty]$称为一个 $\mathscr{F}_t$ 停时，如果对于所有 $t \geq 0$

$$\{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t.$$

τ前事件域定义为

$$\mathscr{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}.$$

Example 5.9 (First hitting time) 令(X_t)是一个状态空间为E的右连续$\mathscr{F}_t$适应过程，对于 $A \subset E$，首次到达A的时间

$$\tau_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\}$$

为一个停时。

Example 5.10 令τ为一个停时，σ为一个取值于 $[0,\infty]$ 的 $\mathscr{F}_\tau$ 随机变量，使得$\sigma \geq \tau$. 则σ为一个停时。特别地，定义

$$\tau_n \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^n} \mathbf{1}_{\{k2^{-n} < \tau \leq (k+1)2^{-n}\}} + \infty \cdot \mathbf{1}_{\{\tau=\infty\}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

为一个趋于τ的停时序列。

Proof: 由于σ是$\mathscr{F}_\tau$可测的，所以

$$\{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$$

又$\sigma \geq \tau$, 那么 $\{\sigma \leq t\} = \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$，故$\{\sigma \leq t\}$是$\mathscr{F}_t$可测的，故为一个停时。

特别地，τ_n为τ的函数，所以τ_n是$\mathscr{F}_\tau$可测的，又$\tau_n \geq \tau$，故τ_n为停时。 ■

5.3 连续时间鞅的一些基本结论

Proposition 5.11 (Doob鞅不等式) 设(X_t)为一个右连续下鞅, 那么对于所有 $c > 0$ 和 $T < \infty$，

$$c \cdot \mathrm{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t \geq c) \leq \mathbb{E}[X_T^+].$$

设(X_n) 为一个右连续鞅, 且对某个$p \geq 1$, $\mathbb{E}|X_t|^p < \infty$. 那么对于所有的 $c > 0$和 $T < \infty$,

$$\mathrm{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}|X_t|^p}{c^p}.$$

Proof: 通过离散时间的结论证明，参考 Proposition 3.15 of [1]. ■

Theorem 5.12 (鞅收敛定理) 设X为一个右连续上鞅，且$(X_t)_{t\geq 0}$是L^1有界的。那么存在一个随机变量$X_\infty \in L^1$使得

$$\lim_{t\to\infty} X_t = X_\infty, \quad a.s.$$

Proof: 通过上穿不等式证明，参考 Theorem 3.19 of [1]. ∎

Theorem 5.13 (Doob停止定理) 设$(X_t)_{t\geq 0}$为一个右连续鞅，$\sigma \leq \tau < \infty$为两个有界停时, 那么

$$[X_\tau|\mathscr{F}_\sigma] = X_\sigma.$$

Proof: 参考 Corollary 3.23 of [1]. ∎

Theorem 5.14 (Doob选样定理) 设(X_t)为一个右连续鞅，τ为一个停时, 那么停止过程$X^\tau := X_{\tau\wedge t}$为一个鞅。进一步，如果停时$\tau$是有界的，则有 $\mathbb{E}[X_\tau] = \mathbb{E}[X_0]$.

Proof: Doob停止定理的推论，参考 Corollary 3.24 of [1]. ∎

参考文献

[1] Le Gall, Jean-François. Brownian motion, martingales, and stochastic calculus. Springer International Publishing Switzerland, 2016.